RELATIVITA' FACILE II

II - LA RELATIVITA' GENERALE

Luciano Ancora

RELATIVITA' FACILE

In questa seconda parte di Relatività Facile, che tratta l'argomento più complesso della Relatività Generale, il testo guida di Einstein, usato nella prima parte, è stato abbandonato. Mi è servito solo per costruire la scaletta dei vari argomenti, che ho approfondito invece, con una ricerca più estesa, consultando alcuni appunti e testi della mia biblioteca personale ed alcuni articoli rinvenuti sulla rete.

Spero che questa mia sintesi, così costruita, risulti al lettore eventuale chiara ed esauriente.

II - LA TEORIA DELLA RELATIVITA' GENERALE

Einstein riteneva che la sua teoria della relatività ristretta, limitata cioè ai sistemi inerziali, potesse essere estesa (generalizzata) includendovi i sistemi non inerziali. Egli pensava cioè, che tutti i sistemi di riferimento dovessero essere equivalenti nella formulazione delle leggi fisiche. Per realizzare la *Teoria della relatività generale*, egli formulò (1908) il *Principio di equivalenza*, secondo il quale non è possibile distinguere fra i fenomeni che si osservano in un campo gravitazionale uniforme, e quelli che si osservano in un sistema che si muove con accelerazione costante. La relatività ristretta elimina l'incongruenza fra la *meccanica classica* e l'*elettromagnetismo* , ma crea una nuova contraddizione, questa volta con la *teoria della gravitazione di Newton*, che è compatibile con il principio di relatività Galileiano, ma non lo è con il principio di relatività ristretta. La legge di Newton non è invariante per trasformazioni si Lorentz. Per risolvere il problema, occorre formulare una nuova teoria, che risulterà in sostanza una nuova descrizione (relativistica) del campo gravitazionale. Un forte impulso allo sviluppo di una tale teoria, lo ha dato lo stesso Einstein enunciando il suo *principio di equivalenza*.

1. Massa inerziale e massa gravitazionale

Galileo, nel suo famoso esperimento sulla caduta dei gravi, dimostrò che la gravità è indipendente dalla massa.
Nell'equazione del moto:

$$F = m_i\, a$$

entra in gioco la *massa inerziale* m_i di un corpo in moto accelerato.
La legge di Newton:

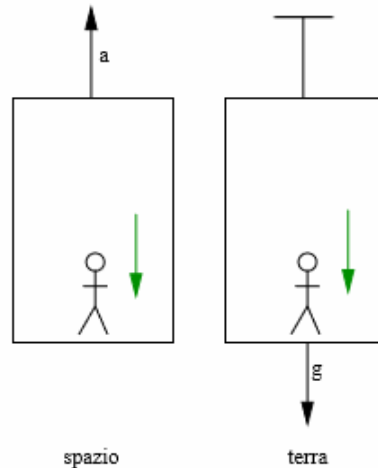
$$F = G\frac{M\, m_g}{r^2}$$

considera invece la *massa gravitazionale* m_g di un corpo in caduta libera.
Si ha:

$$a = \frac{F}{m_i} = \frac{GM}{r^2}\frac{m_g}{m_i} = g \ (accelerazione\ di\ gravità)$$

cioè, l'equivalenza $m_i = m_g$ osservata da Galileo (1), implica che il moto di un corpo in un campo gravitazionale non dipende dalle proprietà del corpo, cioè: g è una proprietà della Terra, per cui tutti i corpi vi cadono con la stessa accelerazione di gravità.

(1) Mi piace pensare a questo esperimento considerando il paradosso seguente. L'inerzia è la proprietà della massa di resistere al moto. Per effetto di questa proprietà, presa singolarmente, dei due corpi in caduta, quello più pesante viaggerebbe più lentamente, contro il senso comune.

Einstein spiega, con un *esperimento mentale*, che è impossibile determinare il proprio stato di moto stando all'interno di una stanza chiusa.

L'osservatore, a causa dell'equivalenza tra m_i ed m_g, non ha modo di distinguere se la forza che lo attrae verso il pavimento sia dovuta alla gravità o ad un'accelerazione verso l'alto di pari intensità. Se la stanza è in caduta libera, la gravità vi si annulla, e l'osservatore non è in grado di capire se si trova in una zona dell'universo senza campo gravitazionale o se invece cade verso un pianeta.
Vediamo come funziona il principio di equivalenza nello sviluppo della teoria della relatività generale.
La possibilità di ottenere un riferimento inerziale (la stanza in caduta libera), per l'uguaglianza $m_i = m_g$, suggerisce ad Einstein l'idea di un *laboratorio* in cui studiare il moto di una massa inerziale m_i, applicandovi i principi della dinamica classica e le trasformazioni della relatività ristretta. Si ottiene così una descrizione *equivalente* a quella che si avrebbe considerando l'aspetto gravitazionale della massa, m_g, considerata come immersa in un campo gravitazionale, in cui il moto studiato seguirebbe invece le leggi della gravitazione universale. Ma Einstein dovrà considerare il suo laboratorio come infinitamente piccolo, situato nell'intorno infinitesimo di un punto dello spazio in esame, cioè nell'approssimazione locale in cui è lecito adoperare la meccanica classica e le trasformazioni di Lorentz.

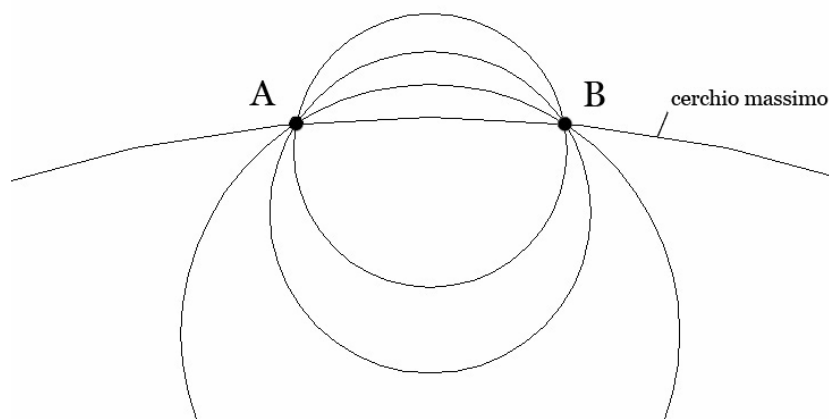
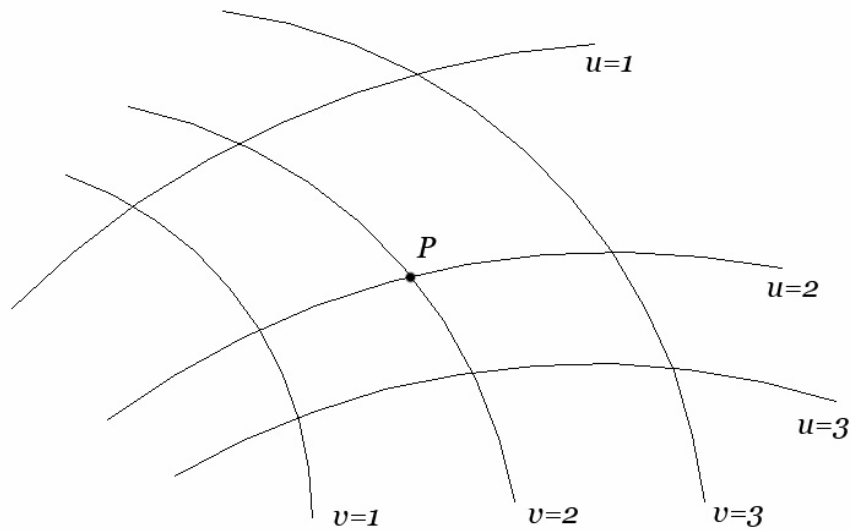
Entra così in gioco lo spazio infinitamente piccolo, che si studia con la geometria differenziale, che qui dovrà essere *quadridimensionale*, essendovi coinvolte le trasformazioni di Lorentz dello spazio-tempo.
In una tale geometria, di tipo *riemanniano* (n-dimensionale), sono coinvolte entità matematiche, dette *tensori*, che descrivono in maniera molto efficace le proprietà dello spazio. Fra questi, di particolare interesse è il cosiddetto *tensore metrico*, che governa tutta la geometria dello spazio, definendovi le nozioni operative di *distanza*, *angolo*, *lunghezza di una curva*, *geodetica*, *curvatura*.
I risultati di un tale studio, estesi ai punti vicini attraverso le trasformazioni di Lorentz, copriranno tutto lo spazio, e ne risulterà una descrizione dello spazio stesso, e quindi la descrizione del campo che lo ha generato. Il risultato finale sono le *Equazioni del campo*, che descrivono il campo gravitazionale attraverso la geometria dello spazio-tempo curvo che esso genera, descritta da alcuni *tensori speciali* che vedremo in seguito.
C'è da sottolineare che la curvatura dello spazio-tempo non è solo spaziale: tutte e quattro le dimensioni sono *piegate*, inclusa quella temporale (non potrebbe essere altrimenti, visto che spazio e tempo sono *mescolati* insieme, per definizione).

2. Sistemi localmente inerziali

Un sistema solidale con la superficie terrestre, non è inerziale. In un sistema inerziale non c'è la gravità (che consente di provare la rotazione della Terra con il pendolo di Foucault). Se la stanza dell'esperimento è in caduta libera, la gravità si annulla, e la stanza può essere considerata un sistema inerziale. Ciò non è possibile per una stanza di dimensioni paragonabili alla Terra, perchè la gravità vi sarebbe rivelata dalla sua variazione in punti diversi. Perciò prenderemo in esame sistemi localmente inerziali, in cui l'inerzialità è valida solo nell'intorno infinitesimo di un punto.
L'effetto di immettere un campo gravitazionale nello spazio è quello di frantumare il sistema di riferimento inerziale in un'infinità di sistemi di riferimento inerziali locali distinti l'uno dall'altro. Lo scopo della relatività generale è quello di descrivere (relativisticamente) il campo gravitazionale, e ciò (per la definizione stessa del concetto di campo) equivale a dare le leggi della variazione (continua) del campo gravitazionale. Nel passaggio da un punto all'altro, lo spazio verrà ricoperto con sistemi inerziali locali (1), legati l'uno all'altro da opportune trasformazioni che, a differenza di quelle di Lorentz, risulteranno essere ora *non lineari*.

(1) Questo è come il comune processo di *mappatura* usato dai cartografi, ricoprendo l'intera superficie *sferica* terrestre con le *carte locali*, realzzate con i metodi di misurazione della *geometria piana*.

3. Le geometrie non-euclidee.

Per oltre due millenni, la geometria dominante è stata quella di Euclide, costruita su alcuni postulati, fra cui quello della retta, come percorso minimo fra due punti, e quello delle rette parallele. Solo nel diciannovesimo secolo si è visto, per opera di matematici quali: Gauss, Lobacevskij, Riemann, che, se si abbandonava il postulato delle rette parallele, si potevano costruire nuove geometrie (non-euclidee) in cui il concetto di retta veniva sostituito con quello metrico di *curva geodetica*, ossia il percorso di minor distanza fra due punti. Tale percorso minimo si misura sempre e solo sulle geodetiche, come si vede nella geometria sferica di Gauss, in cui le geodetiche (che qui svolgono il ruolo delle rette ed hanno sempre un punto in comune) sono i cerchi massimi della superficie sferica, cioè quelli a curvatura minima, come si vede nella figura seguente:

In queste nuove geometrie, tuttavia, avendo abbandonato il concetto di parallelismo, che era alla base del sistema cartesiano delle coordinate, sarà necessario introdurre nuove coordinate per descrivere la posizione spaziale dei punti. Un esempio di queste sono le *coordinate gaussiane* (*Nord* e *Est*) che si trovano in *cartografia*, che è la geometria sferica che descrive la superficie terrestre.
Un sistema di coordinate gaussiane si costruisce nel seguente modo:

Si immagini di tracciare su una superficie curva un sistema arbitrario di curve *u*, designate: *u=1*, *u=2*, *u=3,...* Fra le curve *u=1* e *u=2*, si immaginino tracciate le infinite curve che corrispondono a tutti i numeri reali compresi fra 1 e 2. Il sistema di curve *u* ricopre con continuità l'intera superficie. Le curve non si intersecano, ma per ogni punto della superficie passa una ed una sola curva. In modo analogo si immagini tracciato un secondo sistema di curve *v*. Così, ad ogni punto della superficie rimane univocamente associata una coppia di valori (*u,v*), che diremo le *coordinate gaussiane* del punto sulla superficie. Il metodo esposto vale per un continuo a due dimensioni, ma può essere applicato a spazi con 3, 4 e più dimensioni. Ad ogni punto si assegneranno, in maniera univoca, tante coordinate quante sono le dimensioni del continuo. Le coordinate gaussiane sono la generalizzazione logica delle coordinate cartesiane.

4. Lo spazio quadridimensionale di Minkowski

Occorre illustrare qui brevemente il formalismo introdotto da Minkowski, che rappresenta in maniera più efficace la geometria della relatività ristretta.
Secondo la fisica classica il tempo è assoluto, cioè indipendente dalla posizione e dallo stato di moto del sistema di coordinate. In teoria della relatività, il tempo viene defraudato della sua indipendenza, come mostra la quarta equazione della trasformazione di Lorentz. Questa può essere caratterizzata in modo più semplice, introducendo un parametro *immaginario* in luogo del tempo *t* :

$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

$$x_3 = z$$

$$x_4 = \sqrt{-1}\; c\,t$$

(Questa sembra in pratica un'estensione alla quarta dimensione del diagramma di Argand-Gauss, in cui l'asse immaginario è normale all'asse reale).

In questo modo, il tempo x_4 entra nella descrizione delle leggi naturali nella stessa forma delle coordinate spaziali x_1, x_2, x_3.
Formalmente lo spazio di Minkowski è uno spazio euclideo a quattro dimensioni. La sua introduzione risultò molto utile ad Einstein nelle sue indagini sulla relatività generale.
L'uso dello spazio di Minkowski, descrive bene i fenomeni fisici in regioni infinitesime che circondano tutti i punti (spazio-tempo localmente piatto). In presenza di gravità, lo spazio-tempo viene descritto da una *varietà* curva a quattro dimensioni, per la quale lo spazio tangente ad ogni punto è uno spazio di Minkowski.

5. Equazioni di campo

Per descrivere il comportamento di un sistema fisico in un campo gravitazionale, e quindi ricavare le equazioni del campo, Einstein lo descrive prima, nel formalismo di Minkowski, in un riferimento infinitesimo in *caduta libera*, cioè inerziale, in cui valgono le leggi della relatività ristretta. Poi, eseguendo la trasformazione inversa di quella usata per ottenere il sistema in caduta libera, riconduce la descrizione nello spazio-tempo curvo che si ottiene collegando i vari sistemi inerziali infinitesimi in caduta libera.
Seguendo l'idea illustrata nel paragrafo 1., Einstein prende in esame, nel suo laboratorio infinitesimo in caduta libera, il *moto di un punto materiale libero in un campo gravitazionale*, che nel sistema localmente inerziale del laboratorio risulta essere in moto rettilineo uniforme. Affinché questo stato di moto non vari nel tempo, e quindi possa essere studiato, il laboratorio deve percorrere, solidalmente col punto in esame, una geodetica dello spazio-tempo. Ogni deviazione da tale percorso rivelerà il campo, e quindi lo descriverà. Un osservatore esterno vede così, su larga scala, un punto materiale che si muove lungo una traiettoria curva, la geodetica, piegata dalla gravità. Questa traiettoria si ottiene collegando tutti i punti attraversati dal laboratorio infinitesimo e dal punto, successivamente e con continuità. L'insieme di tutte le geodetiche formerà lo spazio curvo nella sua interezza.

Osservazione importante

E' questa l'idea fondamentale di Einstein che ha condotto alla formulazione della sua teoria generale della relatività. Il punto materiale libero (1) in moto, osservato dall'esterno, descrive col suo movimento, una geometria curvilinea che, nel suo insieme, con l'addensarsi ed il rarefarsi delle curve, indica, in maniera univoca, la variazione spaziale dell'azione della sorgente del moto. E' allora possibile, per la biunivocità introdotta con il principio di equivalenza, e per la sua proprietà transitiva, sostituire direttamente alla descrizione fisica (dinamica) del fenomeno osservato (2), la descrizione di questa sua geometria (3). Questa è una geometria non-euclidea, a 4 dimensioni, per studiare la quale Einstein ha potuto servirsi degli strumenti matematici preconfezionati introdotti da Gauss e Riemann e poi perfezionati da Ricci e Levi Civita.

(1) In assenza di altre forze, diverse dalla gravità.
(2) Qui si considera, per convenienza, la variazione spaziale di una quantità scalare, come il potenziale.
(3) Come avviene nella rappresentazione tridimensionale dei campi in elettromagnetismo.

In accordo con l'idea testé osservata, per mettere in relazione la curvatura dello spazio-tempo alla sorgente del campo gravitazionale che lo ha generato, Einstein azzarda la seguente equazione:

$$A_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$$

dove al primo membro c'è la geometria ed al secondo la dinamica del moto in esame. $T_{\mu\nu}$ è il *tensore energia-impulso* della materia, candidato a rappresentare la sorgente del campo, e $A_{\mu\nu}$, il tensore di Einstein, è un tensore da costruire sulla metrica dello spazio-tempo, descritta dal tensore $g_{\mu\nu}$ e dalle sue derivate prime e seconde (essendo coinvolte nel problema la velocità e l'accelerazione). Utilizzando varie strutture e tecniche che i matematici avevano nel frattempo messo a punto, Einstein costruisce il suo tensore $A_{\mu\nu}$ e trova che:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = kT_{\mu\nu}$$

Confrontando formalmente (1) questo risultato con il *potenziale* gravitazionale newtoniano (che è una funzione *scalare* della posizione, data dall'equazione di Poisson), si ricava il valore di k :

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

(1) Qui si sta applicando il *Principio di covarianza*, che afferma che la forma matematica di una legge fisica *non deve variare* in seguito ad una trasformazione di Lorentz delle coordinate.

e si può scrivere l'equazione di campo nella sua forma finale:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Questa equazione contiene, per come è stata ottenuta, tutte le informazioni geometriche necessarie per rappresentare lo spazio-tempo della relatività generale, in presenza di un campo gravitazionale. Essa è valida nell'approssimazione di *campo debole* e per piccole velocità conduce alla gravità newtoniana. Vi compaiono le seguenti grandezze tensoriali:

$R_{\mu\nu}$ = *tensore di curvatura di Ricci*, che misura il modo in cui il volume varia localmente rispetto al volume usuale di uno spazio euclideo,

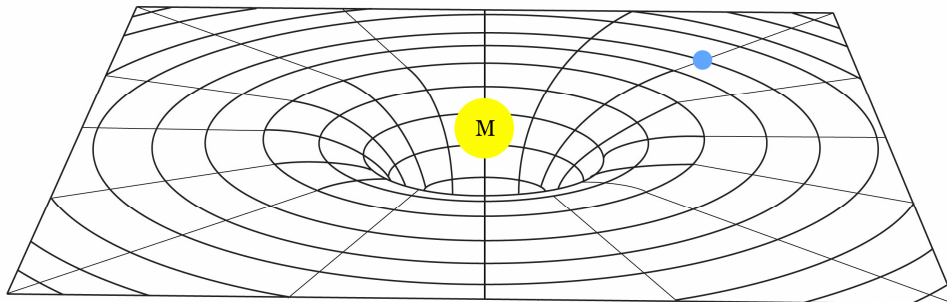
$g_{\mu\nu}$ = *tensore metrico*, che descrive la geometria locale dello spazio-tempo,

$T_{\mu\nu}$ = *tensore energia-impulso*, che descrive il flusso di energia e quantità di moto associate al campo,

oltre a *R*, il cosiddetto *scalare di curvatura*, a *G,* la costante di gravità newtoniana ed alla consueta velocità della luce *c* .

La ricerca in Relatività Generale consiste nel *tentare* la difficile impresa di risolvere le equazioni di campo nei casi distanti dai limiti di campo debole e piccole velocità, per indagare sui fenomeni estremi che si osservano nello spazio profondo, in condizioni di grande densità massa-energia, o in presenza di singolarità (buchi neri). Finora tali tentativi non hanno dato risultati degni di nota.

6. La rappresentazione del campo gravitazionale

Il campo gravitazionale newtoniano è un *campo vettoriale*, nel senso che, nella regione in cui esiste, è misurabile in ogni punto un vettore, caratterizzato da intensità, direzione e verso del campo in quel punto. La rappresentazione usuale dei campi vettoriali fa uso del concetto di *linea di campo*: una curva orientata la cui tangente in ogni punto ha la stessa direzione del campo in quel punto. Le linee di campo sono curve regolari e continue, tranne che in eventuali punti singolari, in genere coincidenti con la posizione della sorgente del campo. Queste linee si concentrano nello spazio dove il campo è più intenso e si rarefanno dove è debole. L'insieme di tutte le linee di campo descrive una superficie (spazio) curva.
La rappresentazione del campo gravitazionale della teoria della relatività generale, realizzata in analogia a quanto sopra descritto, illustra bene i nuovi concetti introdotti da Einstein. Esaminiamoli con riferimento alla figura seguente (che è un'analogia tridimensionale, non essendo possibile rappresentarvi la quarta dimensione, il tempo, anche essa incurvata dalla gravità) :

La presenza della massa M ha prodotto la deformazione dello spazio circostante, costringendoci a modificare la geometria da usare per descriverlo. Nella nuova geometria, la *geodetica* non è più una linea retta, per cui oggetti che altrimenti risulterebbero in moto rettilineo uniforme, in questo nuovo ambiente percorrono una geodetica dello spazio-tempo che non è più rettilinea, ma curvilinea.
Einstein ha *geometrizzato* la gravitazione universale, trasformandola da una descrizione dinamica ad una puramente geometrica, in cui le

traiettorie degli oggetti in moto (*orbite*) sono dovute non più alla forza di attrazione del Sole, ma al fatto che questo con la sua massa ha deformato la geometria dello spazio-tempo intorno a sé.
La curvatura dei raggi di luce, prevista dalla teoria ed osservata durante l'eclisse solare del 1919, si spiega così: non sono i raggi di luce che si incurvano, ma lo spazio in cui viaggiano.